

Calcul de racines carrées

Emmanuel Beffara

M1 MEEF maths 2023-2024, UGA

Objectif: Calculer la racine carrée d'un nombre.

Objectif: Calculer la racine carrée d'un nombre.

Bien entendu, il s'agit de calculer une *approximation*.

Objectif: Calculer la racine carrée d'un nombre.

Bien entendu, il s'agit de calculer une *approximation*.

- On étudie des algorithmes pour calculer des approximations à une précision ϵ près.
- On formule ces algorithmes dans les nombres réels.
- Les réels n'existent pas en programmation : on travaille à précision limitée.

Recherche linéaire

L'idée est de tester des valeurs successives avec un pas donné:

x	x^2
0.8	0.64
0.9	0.81
1.0	1.00
1.1	1.21
1.2	1.44
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25
1.6	2.56
1.7	2.89

En diminuant le pas, on obtient une meilleure précision.

Exercice

Formuler précisément l'algorithme de recherche linéaire et démontrer sa correction.

- Spécifier les entrées et la sortie.
- Préciser les variables utilisées et les invariants.

TP pour plus tard

Programmer un calcul de racine carrée par balayage (une seule étape).

Dichotomie

On part d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée continue et de deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.

Algorithme de recherche dichotomique

Tant que $b - a > \epsilon$:

$$c \leftarrow (a + b)/2$$

Si $f(c) \geq 0$, alors

$$b \leftarrow c$$

sinon

$$a \leftarrow c$$

Renvoyer a

Exercice

- Démontrer que l'algorithme est correct si on le considère sur les nombres réels.
- Déterminer le nombre d'itérations.

Discussion

- Qu'est-ce qui change quand on applique cet algorithme à des nombres de précision limitée?
- Quel rapport avec la recherche dichotomique dans un tableau?

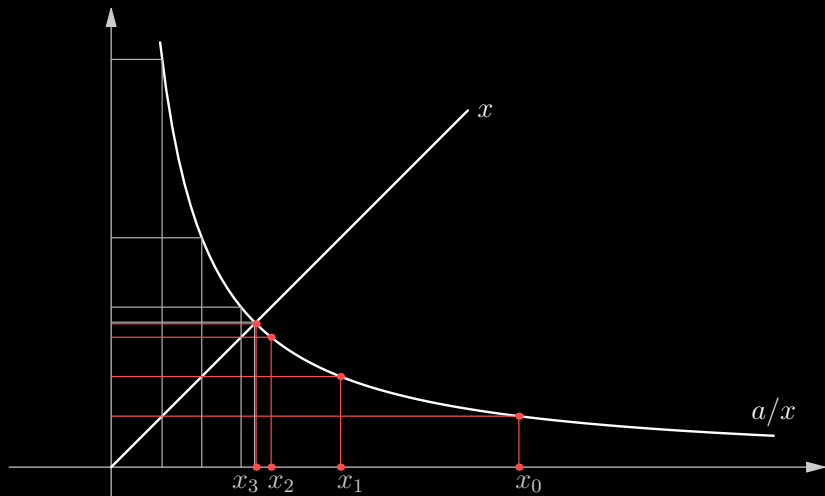
Méthode de Héron

On définit une suite récurrente:

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \quad \text{pour tout } n$$

On démontre que cette suite converge vers \sqrt{a} .

Explication géométrique



Exercice

- Démontrer que la suite converge vers \sqrt{a} .
- Estimer le nombre d'itérations pour approcher la limite à ϵ près, en fonction de a et ϵ .

Exercice

Donner un algorithme pour calculer un approximation de $\sqrt[n]{a}$ à ϵ près en fonction de n , a et ϵ .

Calculs en précision limitée

Si on implémente l'algorithme, on ne peut pas calculer avec des nombres réels.

Exercice

Donner un algorithme permettant de calculer $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ pour un entier n et donner sa complexité.

Exercice

Donner un algorithme permettant de calculer la meilleure approximation possible de \sqrt{x} pour un nombre x représenté avec m bits significatifs.

Exercice

Programmer tout ça.